

0-789532

На правах рукописи

А.И.У.

КОВЫРШИНА АННА ИВАНОВНА

**СТАБИЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ
АВТОМОРФИЗМОВ СВОБОДНОЙ
НИЛЬПОТЕНТНОЙ ГРУППЫ**

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Иркутск — 2011

Работа выполнена на кафедре математики и методики обучения
математике
ГОУ ВПО «Восточно-Сибирская государственная академия
образования»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор
Блудов Василий Васильевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор
Романьков Виталий Анатольевич
кандидат физико-математических наук,
доцент
Соломатин Денис Владимирович

Ведущая организация: Сибирский федеральный университет

Защита состоится 28 апреля 2011 г. в 14-30 часов на заседании
диссертационного совета ДМ 212.179.07 при ОмГУ им. Ф.М. До-
стоевского по адресу: 644077, г. Омск, пр. Мира, 55-А.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОмГУ
им. Ф.М. Достоевского.

Автореферат разослан «21» марта 2011 года.

Ученый секретарь диссертационного совета ДМ 212.179.07,
к.ф.-м.н., доцент

Семенов А.М. Семенов

НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА КГУ



0000687156

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертация посвящена вопросам существования стабильных элементов относительно всех автоморфизмов нильпотентной группы ступени 12.

Стабильные элементы свободных нильпотентных групп относительно всех автоморфизмов группы тесно связаны с инвариантами Ли свободных колец Ли. Условия существования инвариантов Ли были найдены в работах Ф. Вефера (1949 г.)¹ и М. Барроу (1958 г.)^{2 3}. Это давало основание считать, что в свободных нильпотентных группах также могут существовать нетривиальные стабильные элементы при определенных условиях на ранг и степень нильпотентности группы. Отметим, что вопрос о существовании таких элементов в группах был поставлен А. Мясниковым в проекте MAGNUS⁴ (вопрос N1):

Пусть G - свободная нильпотентная группа конечного ранга r . Пусть элемент $g \in G$ неподвижен относительно всех автоморфизмов группы G . Верно ли, что $g = 1$?

Отрицательный ответ на этот вопрос был получен В.В. Блудовым⁵ в 1998 году, который привел примеры нетривиальных стабильных элементов свободной нильпотентных групп ранга 2. Например, элемент $[a, b, a, [a, b, b], [a, b]]$ — стабилен относительно лю-

¹Wever F. Ueber Invarianten in Lieschen Ringen // Mathematische Annalen. – 1949. – Vol.120. – P. 563–580.

²Burrow M.D. Invariants of free Lie rings // Communications on pure and applied mathematics. – 1958. – Vol.11. – P. 419–431.

³Burrow M.D. The enumeration of Lie invariants // Communications on pure and applied mathematics. – 1967. – Vol.20. – P. 401–411.

⁴Nilpotent groups [Электронный ресурс] — Режим доступа: <http://www.sci.cuny.cuny.edu/shpil/gworld/problems/probnil.html> (5 марта 2011)

⁵Блудов В.В. Неподвижные точки относительно всех автоморфизмов в свободных нильпотентных группах. Третий Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике. Тез. докл. часть 5. Новосибирск, 1998.

бого автоморфизма свободной нильпотентной группы ранга два и степени восемь.

В 2001 году независимо друг от друга А. Папистас⁶ и Е. Форманек⁷, основываясь на работах Ф. Вефера и М. Барроу, классифицировали все пары (r, n) , при которых существуют нетривиальные стабильные элементы в свободных нильпотентных группах ранга r и степени n . Так, для $r = 3$ наименьшая степень нильпотентности, при которой существуют нетривиальные стабильные элементы равна 12. При этом конкретный вид стабильных элементов в этих работах не был указан, его нахождение представляет определенную техническую сложность. Первые примеры стабильных элементов в свободных нильпотентных группах ранга 3 получены в 2004 году и опубликованы в 2008 году в работе соискателя [3].

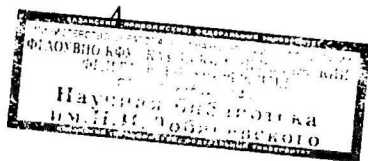
Цели работы:

- получение метода нахождения стабильных элементов свободной нильпотентной группы.
- описание всех стабильных элементов с однородным вхождением образующих в свободных нильпотентных группах ранга 2, степени 12 (в терминах базисных коммутаторов).
- описание всех стабильных элементов с однородным вхождением образующих в свободных нильпотентных группах ранга 3, степени 12 (в терминах базисных коммутаторов).

Методика исследования. Использованы методы комбинаторной теории групп и приемы исследования автоморфизмов свободных нильпотентных групп.

⁶Papistas A. A note on fixed points of certain relatively free nilpotent groups // Communications in algebra. – 2001. – Vol.29. – P. 4693–4699.

⁷Formanek E. Fixed points and centers of automorphism groups of free nilpotent groups // Communications in algebra. – 2002. – Vol.30. – P. 1033–1038.



Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и снабжены доказательствами.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях по теории групп, при чтении специальных курсов лекций по алгебре и при написании монографий.

Апробация работы. Основные результаты диссертации были представлены на Международной конференции по теории групп (Екатеринбург, 2001), международной конференции «Алгебра, логика и кибернетика» (Иркутск, 2004), международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2008), международной конференции «Алгебра, логика и приложения» (Красноярск, 2010) а также неоднократно докладывались на семинарах Иркутского государственного университета и Восточно-Сибирской государственной академии образования.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в семи работах, в том числе три работы в журналах, рекомендованных ВАК РФ [3, 6, 7].

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, разбитых на 10 параграфов, заключения, списка литературы (19 названий), занимает 79 страниц текста, набранного в системе \LaTeX . Дополнительно представлено приложение на 34 страницах. Нумерация теорем, лемм, следствий и примеров в диссертации двойная: первое число — номер главы, второе — номер теоремы или леммы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

К основным результатам диссертации относятся теоремы 3.1, 4.1, 5.1 и 5.2, а также метод нахождения стабильных элементов.

Во **введении** дается обоснование актуальности темы исследований.

Первая глава является вводной. В **первом параграфе** поясняется терминология и основные обозначения, принятые в работе. Во **втором параграфе** дается определение базисных коммутаторов и рассматривается пример разложения небазисного коммутатора по базисным. **Третий параграф** посвящен автоморфизмам свободной нильпотентной группы ступени 12. Указаны автоморфизмы, применение которых к элементу группы достаточно для проверки стабильности этого элемента. Приводится замечание 1.1, из которого следует одно из достаточных условий нестабильности элемента (если автоморфный образ элемента представлен в определенном виде).

Во **второй главе** приводится первый основной результат диссертации — описывается метод нахождения стабильных элементов. Метод заключается в разбиении множества всех базисных коммутаторов на 48 подмножеств M_1 , M_2 и Δ_j , $j = 1, \dots, 46$, коммутаторов определенного вида и установлении связей между этими подмножествами. В **первом параграфе** вводится понятие вида (расположение скобок) базисного коммутатора и определяют все возможные подмножества базисных коммутаторов каждого вида. Установлены связи между этими подмножествами в зависимости от автоморфных образов элементов этих множеств. Нетривиальная линейная комбинация элементов из Δ_j , $j = 1, \dots, 46$ обозначена через $U_j(\hat{m}^{(j)})$. Во **втором параграфе** на основании достаточного условия нестабильности элемента, отмеченного в первой главе, и полученных связей между всеми подмножествами базисных коммутаторов, описывается общая схема нахождения стабильных элементов. В **третьем параграфе**, в качестве иллюстрации применения метода нахождения стабильных элементов, приводится пример стабильного элемента, который представлен в виде суммы 22 базисных коммутаторов из Δ_{33} .

Третья глава посвящена исследованию условий нестабильности элементов. Найдены все виды базисных коммутаторов, такие что среди линейных комбинаций коммутаторов каждого вида нет

стабильных элементов. Для этого были вычислены коэффициенты базисных коммутаторов, с которыми они входят в представление стабильного элемента. Рассмотрено 19 подмножеств базисных коммутаторов определенного вида. После всех вычислений, все значения выражений, определяющих коэффициенты элементов этих подмножеств, оказались равны нулю.

В первом параграфе доказывается лемма 3.1, которая позволяет установить нестабильность элемента, в представление которого входит линейная комбинация элементов из M_1 или M_2 . Во втором параграфе, используя эту лемму, получаем теорему о строении нестабильных элементов группы $F_{3,12}$:

Теорема 3.1 Пусть $K = \{1, \dots, 12\} \cup \{22, 26, 27, 28, 35\}$. Тогда для любой последовательности целых чисел $\hat{m}^{(k)}$ и любой нетривиальной комбинации базисных коммутаторов $U_k(\hat{m}^{(k)})$, $k \in K$, существует автоморфизм φ , под действием которого $(U_k(\hat{m}^{(k)}))^\varphi \neq U_k(\hat{m}^{(k)})$.

Данную теорему мы будем считать главным критерием нестабильности элемента. Теорема 3.1 является вторым основным результатом диссертации.

В четвертой главе рассматриваются 28 подмножеств базисных коммутаторов, которые мы разделили на три набора, используя связи между подмножествами в зависимости от автоморфных образов элементов этих множеств. Доказательство того, что в каждом наборе существуют нетривиальные стабильные элементы проводится в следующей серии утверждений:

Утверждение 4.1 Пусть $K = \{23, 24, 25, 34, 39, 40, 44, 45\}$. Тогда существуют последовательности целых чисел $\hat{m}^{(k)}$, $k \in K$, такие что элемент $g = \sum_{k \in K} U_k(\hat{m}^{(k)})$ является нетривиальным стабильным элементом группы $F_{3,12}$.

Утверждение 4.2 Пусть $K = \{41, 43, 46\}$. Тогда существуют последовательности целых чисел $\hat{m}^{(k)}$, для $k \in K$, такие что элемент $g = \sum_{k \in K} U_k(\hat{m}^{(k)})$ является нетривиальным стабиль-

ным элементом группы $F_{3,12}$.

Утверждение 4.3 Пусть K — множество, состоящее из натуральных чисел от 13 до 21 и чисел 29, 30, 31, 32, 36, 37, 38, 42. Тогда существуют последовательности целых чисел $\hat{m}^{(k)}$, $k \in K$, такие что элемент $g = \sum_{k \in K} U_k(\hat{m}^{(k)})$ является нетривиальным стабильным элементом группы $F_{3,12}$.

Второй параграф содержит третий основной результат диссертации, которой следует из утверждений 4.1 — 4.3 и примера, представленного в главе 2.

Теорема 4.1 Существует подгруппа H ранга 33, любой элемент которой является стабильным элементом группы $F_{3,12}$.

Данная теорема позволяет получить полное описание стабильных элементов с однородным вхождением образующих группы $F_{3,12}$. Они записываются в виде линейных комбинаций 2011 базисных коммутаторов. В зависимости от выбора базисных коммутаторов и их коэффициентов, получаются различные нетривиальные стабильные элементы.

В **пятой главе** описаны стабильные элементы свободной нильпотентной группы ранга 2, степени 12:

Теорема 5.1 Пусть $K = \{1, 3, \dots, 11, 16, 22, 27, 28, 33\}$. Тогда для любой последовательности целых чисел $\hat{m}^{(k)}$ и любой нетривиальной комбинации базисных коммутаторов $U_k(\hat{m}^{(k)})$, $k \in K$, существует автоморфизм φ , под действием которого $(U_k(\hat{m}^{(k)}))^\varphi \neq U_k(\hat{m}^{(k)})$.

Теорема 5.2 Существует подгруппа H ранга 9, любой элемент которой является стабильным элементом группы $F_{2,12}$.

Приложение содержит явный вид базисных коммутаторов, используемых при построении стабильных элементов, и коэффициенты этих коммутаторов.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

На защиту выносятся следующие результаты.

1. Получен метод нахождения стабильных элементов свободной нильпотентной группы.
2. Найдены условия на линейные комбинации базисных коммутаторов свободных нильпотентных групп степени 12, рангов 2 и 3, при которых эти комбинации не являются стабильными элементами.
3. В свободных нильпотентных группах степени 12, рангов 2 и 3, найдены подгруппы рангов 9 и 33 соответственно, любой элемент которых является стабильным.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Ковыршина А.И. Неподвижные точки автоморфизмов свободных нильпотентных групп // Межд. семинар по теории групп, посвященный 70-летию А.И. Старостина и 80-летию Н.Ф. Сесекина: Тез. докл. – Екатеринбург: Ин-т мат. и мех. УрО РАН; Изд-во Урал. Ун-та, 2001. – С. 101–102.
2. Клейменов В.Ф., Ковыршина А.И. Неподвижные элементы в свободных нильпотентных группах // «Алгебра, логика и кибернетика: материалы межд. конф.»: Тез. докл. – Иркутск, 2004. – С. 53–54.
3. Ковыршина А.И. Неподвижные элементы в свободных нильпотентных группах ранга три // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. – 2008. – Т.8, вып.2. – С. 85–91.

4. Ковыршина А.И. Неподвижные элементы свободных нильпотентных групп ранга три // «Современные проблемы обучения математике и информатике»: материалы II всероссийской научно-практической конференции преподавателей математики и информатики школ, инновационных учебных заведений и вузов. Иркутск, ГОУ ВПО ИГПУ, 2009. – С. 132–133.
5. Ковыршина А.И. Описание неподвижных элементов свободных нильпотентных групп ранга три // Межд. конф. «Алгебра, логика и приложения»: Тез. докл. Красноярск, 2010. – С. 48–49.
6. Ковыршина А.И. Стабильные элементы в свободных нильпотентных группах ранга три // Вестник Омского университета. – 2010. – №4 (58). – С. 20–23.
7. Ковыршина А.И. Стабильные элементы в свободных нильпотентных группах ранга два // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2010. – Т.3, № 4. – С. 50–59.

Ковыршина Анна Ивановна
Стабильные элементы автоморфизмов свободной
нильпотентной группы

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата
физ.-мат. наук

Подписано в печать 16.03.2011. Заказ № 5135

Формат 60×84 1/16. Усл. печ. л. 0,75. Тираж 112 экз.

Отпечатано в изд-ве Байкальского государственного университета
экономики и права
664003, Иркутск, Ленина, 11

102